MATEMATICA - LEZIONE 16

venerdì 27 ottobre 2023 11:13

- **LIMITI DI FUNZIONI**

  - Limiti di somme, differenze, prodotti, quozienti.
  - Limite di composizioni di funzioni:

TEOREMA (LIMITI DI COMPOSIZIONI DI FUNZIONI)

Siano $f_1 : A \to \mathbb{R}$ e $f_2 : B \to \mathbb{R}$ tali che $f_1(A) \subseteq B$. Siano $x_0 \in D(A)$, $y_0 \in D(B)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Assumiamo che:

1) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = y_0$

2) $\lim_{x \to y_0} f_2(x) = \ell$

3) $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f_1(x) \neq y_0 \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

(oppure $y_0 \in B$ e $f_2(y_0) = \ell$)

Allora: $\lim_{x \to x_0} f_2(f_1(x)) = \ell$.

Il teorema ci dice che $\lim_{x \to x_0} f_2(f_1(x)) = \lim_{y \to y_0} f_2(y)$ cioè che possiamo calcolare i limiti per per sostituzione.

ESEMPIO

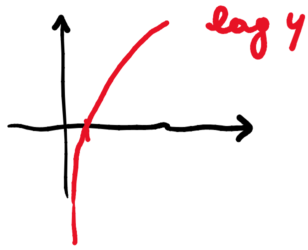
$$\boxed{y = e^{-x} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0}$$

- $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(e^{-x}) = \lim_{y \to 0} \sin(y) = \operatorname{sen} 0 = 0.$

- $\lim_{x \to +\infty} \log_2 x - \log_2(2x+1)$ f.i. $+\infty - \infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \log_2\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2 = -1$$

• $\lim_{x\to 0} \log x - \log^3 x$ $\quad -\infty - (-\infty)$



Attenzione

$\log^3 x = (\log x)^3$

Non confondere con $\log x^3 = \log(x^3) = 3\log x$

• $\lim_{x\to 0} \log x - \log^3 x = \lim_{y\to -\infty} y - y^3 = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \log x = -\infty}$$

Limiti di potenze con base ed esponente variabili:

Calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ con $\boxed{f(x)>0}$.

Idea:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

Usando questa regola si ricava che:

• Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha$ possiamo dire che:

1) Se $l \in (0,+\infty)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = l^{\alpha}$

2) Se $l = +\infty$ e $\alpha > 0$ (anche $\alpha = +\infty$) $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

3) Se $l = +\infty$ e $\alpha < 0$ (anche $\alpha = -\infty$) $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

4) Se $l = 0$ e $\alpha > 0$ (anche $+\infty$) : $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

5) Se $\ell = 0$ e $\alpha < 0$ (anche $-\infty$): $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

6) Se $\alpha = +\infty$ e $\ell > 1$: $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$

7) $\alpha = +\infty$ e $0 \leq \ell < 1$: $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

8) Se $\alpha = -\infty$ e $\ell > 1$: $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$

9) Se $\alpha = -\infty$ e $0 \leq \ell < 1$: $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$.

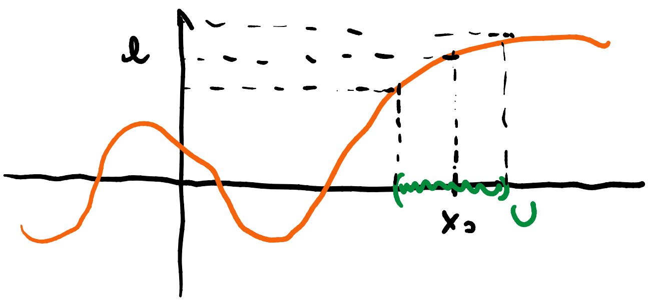
Forme indeterminate per le potenze:

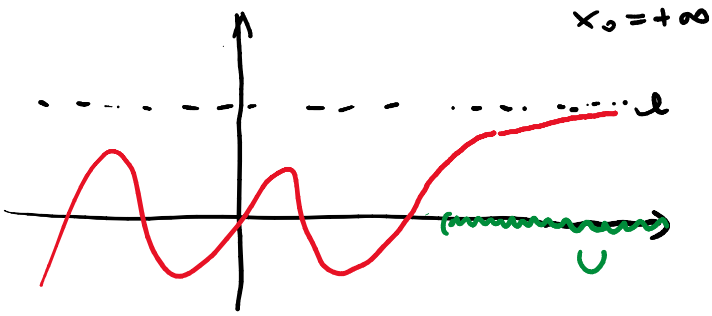
$$1^{+\infty} \quad 1^{-\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0$$

Teoremi sui limiti:

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Siano $x_0 \in D(A)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Se $\ell \neq 0$, allora $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ.





DIM

Se $\ell \neq 0$, $\exists\, V \in \mathcal{I}_\ell$ t.c. $0 \notin V$.
Tutti i punti di V hanno lo stesso segno di ℓ.
Siccome $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, in corrispondenza di V esiste $U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

Allora $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$, $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ. □

COROLLARIO 1: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0 \in D_r(A)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

- Se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \geq 0$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$, allora $\ell \geq 0$.
- Se $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \leq 0$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$, allora $\ell \leq 0$.

Def: Sia $P(x)$ una proprietà che dipende da $x \in A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $P(x)$ è vera DEFINITIVAMENTE PER $x \to x_0$ e $x \in A$ se: $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $P(x)$ è vera $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

Usando questa definizione possiamo riscrivere la def. di limite e il teorema della permanenza del segno.

Definizione di limite:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall V \in \mathcal{I}_\ell$, $f(x) \in V$ defin. per $x \to x_0$, $x \in A$

Teorema della permanenza del segno:

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\ell \neq 0$, allora $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ defin. per $x \to x_0$, $x \in A$
- Se $f(x) \geq 0$ defin. per $x \to x_0$, allora $\ell \geq 0$
- Se $f(x) \leq 0$ defin per $x \to x_0$, allora $\ell \leq 0$.

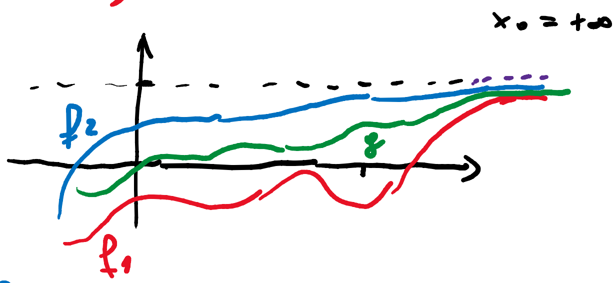
OSS Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

- Se $\ell > \alpha$, allora $f(x) > \alpha$ defin per $x \to x_0$
- Se $\ell < \alpha$, allora $f(x) < \alpha$ defin. per $x \to x_0$

- Se $f(x) \geq \alpha$ defin. per $x \to x_0$, allora $\ell \geq \alpha$
- Se $f(x) \leq \alpha$ defin. per $x \to x_0$, allora $\ell \leq \alpha$

TEOREMA (DEL CONFRONTO / DEI CARABINIERI)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e siano $f_1, f_2, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in D_r(A)$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$.



Assumiamo che:

1) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell$;

2) $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ definitivamente per $x \to x_0$, $x \in A$.

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

DIM

Sappiamo che definitivamente per $x \to x_0$: $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$.

Ma $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$, quindi $\forall V \in D_\ell$

$f_1(x) \in V$ definitivamente per $x \to x_0$ e $f_2(x) \in V$ defin per $x \to x_0$

Dato che V è un intervallo si ha:

$g(x) \in [f_1(x), f_2(x)] \subseteq V \implies g(x) \in V$.

defin. per $x \to x_0$.

Quindi $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$. $\square$

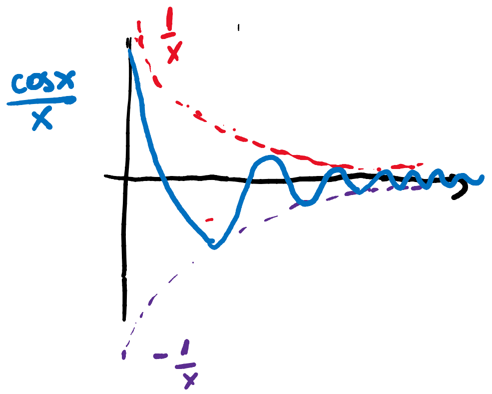
ESEMPI

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = ?$$

Ricordiamo che $-1 \leq \cos x \leq 1$. Quindi possiamo dire che se $x > 0$:

$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Ma $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$.

Per il teorema dei carabinieri: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.



OSS Nel teorema dei carabinieri:

- Se $\ell = +\infty$ invece dell'ipotesi 2), basta che $f_1(x) \le g(x)$.
- Se $\ell = -\infty$, invece di 2) basta $g(x) \le f_2(x)$.

ESEMPIO

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sin x$$

$$x - \sin x \ge x - 1 \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

quindi $\lim_{x \to +\infty} x - \sin x = +\infty$.

- Abbiamo visto che può succedere che $\lim_{x \to x_0} f(x) \nexists$.

Ad esempio:

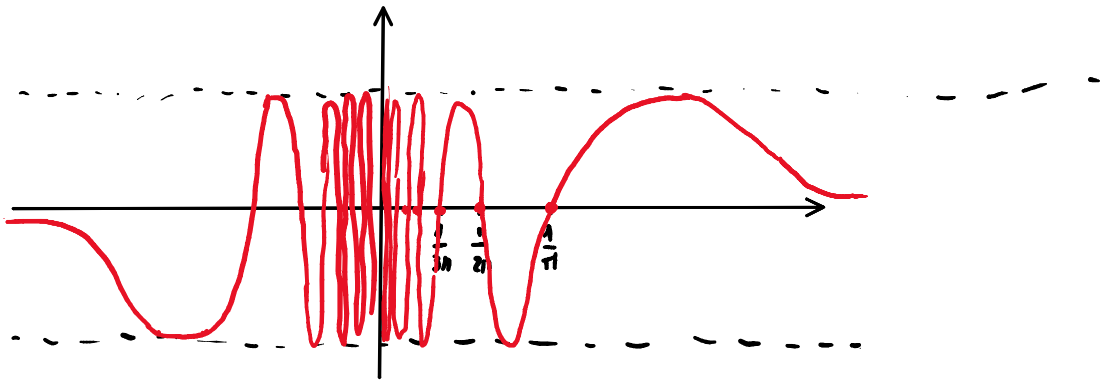
- $\lim_{x \to +\infty} \sin x \nexists$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists$

Nell'esempio di $\frac{1}{x}$ $\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ e $\exists \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

Può succedere che non esistano né $\lim_{x \to x_0^+}$ né $\lim_{x \to x_0^-}$.

ESEMPIO

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$



Si può dimostrare che $\nexists \lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ e $\nexists \lim_{x \to 0^-} \sin \frac{1}{x}$.

TEOREMA DI ESISTENZA DEI LIMITI PER FUNZIONI MONOTONE

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se f è monotona in (a, b), allora $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\exists \lim_{x \to b^-} f(x)$.

Inoltre:

1) Se f monotona crescente in (a, b):

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$

2) Se f monotona decrescente in (a, b), allora:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

Gerarchie degli infiniti:

Le funzioni:

$f(x) = (\log_a x)^\alpha$ con $a > 1$, $\alpha > 0$.

$f(x) = x^\beta$ con $\beta > 0$.

$f(x) = a^x$ con $a > 1$

$f(x) = x^x$

sono funzioni per cui $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Si può dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \alpha,\beta>0,\ a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \qquad \beta>0,\ a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0 .$$

Def: Sia $A\subseteq\mathbb{R}$, siano $f_1, f_2 : A\to\mathbb{R}$, $x_0\in D(A)$ tali che $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0} f_2(x)=\pm\infty$.
Si dice che f_2 è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE rispetto a f_1 se $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$.

ESEMPI

- $$\lim_{x\to+\infty} \log x - x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2\Big(\underbrace{\frac{\log x}{x^2}}_{\text{per } x\to+\infty\ 0} - 1\Big) = +\infty\cdot(-1) = -\infty .$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\log x}{\sqrt{2x-3}} \qquad \text{f.i. } \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}}\Big(1+\underbrace{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}_{\to 0}\Big)}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{2-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{e^x} = 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{x^2+1} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{(x^2+1)e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}_{\to 1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

- $$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{\left(\frac{1}{y}\right)^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0.$$

- $$\lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

LIMITI NOTEVOLI

1) $$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2) $$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-\cos x)}{x^2} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)\,x^2} = \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)\,x^2}$$

$$\simeq \underbrace{\frac{1}{(\cos x+1)}}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

3) $$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

4) $$\lim_{x\to0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

5) $$\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

6) $$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log a$

8) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

9) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\log a}$ se $a \neq 1$.

10) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

11) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

12) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3}}$$

ESEMPI:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot 3$$
$$= 1 \cdot 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \cdot x$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \cdot \lim_{x \to 0} x$$
$$= \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

- $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$